وتتحقق الشرط $\forall a \in T \; , \; aT = Ta = T$

وحسب ملاحظة سابقة تكون T زمرة وبالتالي فإن T زمرة جزئية من S

المحاضرة ١٢١٥

## - قابلية القسمة:

إذا كانت S نصف زمرة وليست زمرة فهذا يعني أنه هنالك على الأقل عنصرين $a, b \in S$ بحيث أنه لا يوجد من أجلهما $x, y \in S$ تحقق العلاقتين

$$xb = a \qquad , \; by = a$$

$$\boxed{Sb \neq S} \qquad \boxed{bS \neq S}$$

من الممكن أن تتحقق من أجل عنصرين $a, b$ إحدى العلاقتين السابقتين أي أنه قد نجد $x$ أو $y$ تحقق إحدى المعادلتين

**تعريف:**

نسمي العنصر b من نصف الزمرة S قاسماً يمينياً للعنصر a من S إذا وجد عنصر $x \in S$ بحيث يكون $xb = a$

كما نسمي b قاسماً يسارياً للعنصر a من S إذا وجد $y \in S$ بحيث يكون $by = a$

ونقول في الحالة الأولى إن a يقبل القسمة على b من اليمين وفي الحالة الثانية a يقبل القسمة على b من اليسار

**مبرهنة** (دورة)

لتكن S نصف زمرة و B مجموعة القواسم اليمينية واليسارية لكل عنصر في S فإن

1- B غير خالية إذا وفقط إذا كانت S مونوئيد (نصف زمرة واحدية) (دورة)

2- B زمرة جزئية من S إذا كانت غير خالية

**البرهان:**

إن المجموعة $B = \{b \in S \; ; \; bS = Sb = S\}$

1- لزوم الشرط: نفرض أن $B \neq \emptyset$ يوجد عنصر $b \in S$ بحيث يكون $b \in B$

وبالتالي مهما تكن $\boxed{a \in S}$ فإنه يوجد $x, y \in S$ بحيث يكون $bx = a$ & $yb = a$

لكن $b \in S$ وبالتالي يوجد $e, \acute{e} \in S$ بحيث يكون $\acute{e}b = b$ & $be = b$

ومنه نجد أنه:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{ae} = ybe = yb = \boxed{a} \Rightarrow \text{e حيادي يميني} \\ \boxed{\acute{e}a} = \acute{e}bx = bx = \boxed{a} \Rightarrow \text{é حيادي يساري} \end{array}\right\} \Rightarrow e = \acute{e}$$

أي أن $e$ حيادي في $S$ $\Leftarrow$ $S$ مونوئيد

كفاية الشرط: لنفرض أن $S$ مونوئيد فهي تملك عنصر حيادي $e$ وهو يحقق الشرط أن $es = se = s$ وهذا يؤدي إلى أن $e \in B$ $\Leftarrow$ $B$ غير خالية

2 - إذا كانت $B$ غير خالية، وليكن $b_1, b_2 \in B$ فإن

$$\left.\begin{array}{l} b_1 b_2 s = b_1(b_2 s) = b_1 s = s \\ s b_1 b_2 = (s b_1) b_2 = s b_2 = s \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 b_2 \in B \Rightarrow$$

* $B$ نصف زمرة جزئية من $S$

$B \neq \emptyset$ حسب البند الأول من هذه المبرهنة فإن $S$ مونوئيد أي أن $\exists\, e \in S$ حيادي

وليكن $es = se = s$ $\Leftarrow$ $e \in B$

بما أن $e \in S$ فمهما يكن $b \in B$ فإنه يوجد $b', b'' \in S$ بحيث يكون $e = bb'$ و

أي $e = b''b$

تركيز

$$\boxed{b'} = eb' = b''bb' = b''e = \boxed{b''} \Rightarrow$$

ومنه يكن $b \in B$ فإنه يوجد $b' \in S$ بحيث يكون $bb' = b'b = e$

أي أن $b'$ نظير $b$ في $S$

$$\left.\begin{array}{l} s = es = b'bs = b's \\ s = se = sbb' = sb' \end{array}\right\} \Rightarrow b's = sb' = s$$

$$\Rightarrow \underline{b' \in B}$$

أي أن $b'$ هو نظير $b$ في $B$ ومنه نستنتج أن $B$ زمرة جزئية من $S$

## مبرهنة (1)

في نصف زمرة S ، مجموعة كل العناصر التي تقبل القسمة من اليمين ومن اليسار على كل عنصر من عناصر S ، هي إما خالية أو زمرة جزئية من S

**البرهان:**

لتكن C مجموعة كل العناصر التي تقبل القسمة من اليمين ومن اليسار على كل عنصر من عناصر S

إذا لم تكن $C = \emptyset$ فلنفرض أن $c_1, c_2 \in C$ مهما يكن $a \in S$ يوجد

$x \in S$ بحيث يكون $c_1 = ax$

أي: $c_1c_2 = (ax)c_2 = a(xc_2)$

وبالتالي فإن $c_1c_2$ تقبل القسمة على $a$ من اليسار

وبنفس الطريقة إذا كان $a \in S$ يوجد $y \in S$ بحيث يكون $c_2 = ya$

أي: $c_1c_2 = c_1(ya) = (c_1y)a$

وبالتالي فإن $c_1c_2$ تقبل القسمة على $a$ من اليمين

وبالتالي $c_1c_2 \in C$ أي أن C نصف زمرة جزئية من S

وما أنه $c_1, c_2 \in C$ فإن $c_1', c_2 \in S$ فإنه يوجد $u, v, w$ في S بحيث يكون

$uc_1' = c_2$ $\quad c_1'v = c_2$ $\quad c_2w = c_1$

($c_1$ تقبل القسمة على $c_2$ من اليسار) (أي $c_2$ تقبل القسمة على $c_1'$ من اليسار) (أي $c_2$ تقبل القسمة على $c_1'$ من اليمين)

ومنه

$$uc_2 = u(c_1'v) = (uc_1')v = c_2v \qquad (1)$$

وبالتالي

$$c_2(\underbrace{c_1v'c_1}_{y}) = (c_1'v)(vc_1) = c_2(vc_1) = (c_2v)c_1 \overset{(1)}{=} (uc_2)u_1$$
$$= (uc_2)(c_2w)$$
$$= uc_2'w$$
$$= c_2w = \boxed{c_1}$$

أي أن $y = c_2v'c_1$ هو حل للمعادلة $c_2y = c_1$ في S

- لنثبت أن $y \in C$ ؟؟

لذا مهما تكن $a \in S$ يوجد $c_1, c_2 \in S$ بحيث أن:

$c_2 = s_2 a \quad , \quad c_1 = a s_1$

ومنه

$$y = c_1 v' c_2 = a s_1 v' s_2 a = a(\underbrace{s_1 v' s_2 a}_{\in S})$$
$$= (a s_1 v' s_2) a$$

وهذا يقودنا إلى أن $y \in C$ أي أن $y = c_1 v' c_2$ هو حل المعادلة $c_1 y = c_2$ في $C$

$\forall c_1 \in C \; ; \quad \underline{c_1 C = C} \iff c_1 y = c_2$

وبنفس الطريقة تمامًا يجب أن نبرهن أن: $x = c_2 v' c_1$ حل المعادلة $x c_1 = c_2$
حيث $x \in C$

من أجل الإيضاح لبرهان ذلك

نفرض أن $c_1, c_2 \in C$ فإن $c_1, c_1' \in S$ وبالتالي فإنه يوجد $u, v, w \in S$
حيث يكون:

$c_1' u = c_1 \qquad v c_1' = c_1 \qquad w c_1 = c_1$

($c_1'$ تمثل المحايد لـ $c_1$ من اليسار) (.... من اليسار) ($c_1$ تمثل المحايد لـ $c_1$ من اليسار)

ومنه:

$$v c_1 = v(c_1' u) = (v c_1') u = c_1 u \quad ②$$

ومنه:

$$\boxed{(\underbrace{c_2 v' c_1}_{x}) c_1'} = (c_2 v')(v c_1') = (c_2 v') c_1 = c_2 (v c_1) = c_2 (c_1 u)$$
$$= (w c_1)(c_1 u)$$
$$= w c_1' u$$
$$= w c_1 = \boxed{c_1}$$

أي أن $x = c_2 v' c_1$ حل المعادلة $x c_1 = c_2$ في $S$

لكن هل $x \in C$ ؟؟

لدينا مما سبق $a \in S$ فإنه يوجد $c_1, c_2 \in S$ بحيث يكون:

$c_1 = a s_1 \quad , \quad c_2 = s_2 a$

$$x = c_2 v' c_1 = a s_1 v' s_2 a = a(\underbrace{s_1 v' s_2 a}_{\in S}) = (\underbrace{a s_1 v' s_2}_{\in S}) a$$

ومنه فإن $x \in C$ وبالتالي فإن $x = c_2 v' c_1$ هو حل المعادلة $x c_1 = c_2$ في $C$

وهذا يكافئ القول $\underline{C c_1 = C}$ أيًا كان $c_1 \in C$